Clase 21: Continuación

17 de diciembre de 2006

Ejemplo 1. *(Este ejemplo es una preparación para el ejemplo siguiente)*

Sea el problema de hallar $u(x)$ acotada tal que

$$-u''(x) + u(x) = f(x); \quad 0 \leq x < \infty \tag{1}$$

$$u(0) = a, \quad a > 0 \tag{2}$$

donde $f \in C([0; \infty))$ acotada una función dada. Para aplicar la TF es necesario extender el problema a $-\infty < x < \infty$. Definimos extensiones impares de $u(x)$, f(x) por

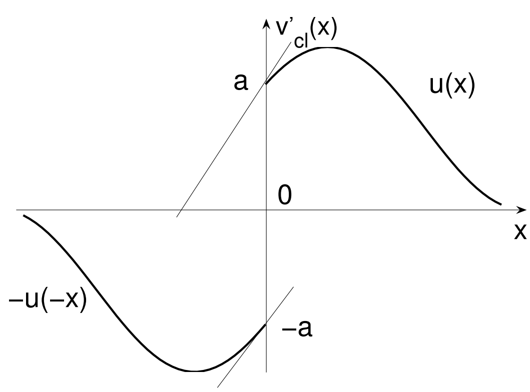
$$v(x) := \begin{cases} u(x); & x > 0 \\ -u(-x); & x < 0 \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} f(x); & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Tenemos

$$v'_{gen}(x) = v'_{cl}(x) + 2a\delta(x), \tag{4}$$

$v''_{gen}(x) = v''_{cl}(x) + 2a\delta'(x)$,

ya que el salto de $v'_{cl}(x)$ en $x = a$ es 0, como ilustra la figura siguiente



$$v'_{cl}(a-) = v'_{cl}(a+)$$

De (4) tenemos

$$-v''_{gen}(x) + v(x) = -v''_{cl}(x) + v(x) - 2a\delta'(x); \quad -\infty < x < \infty \tag{5}$$

Para $x > 0$ tenemos de (3) que $-v''_{cl}(x) + v(x) = -u''(x) + u(x) \overset{(1)}{=} f(x) = g(x), \quad x > 0,$ mientras que para $x < 0$ tenemos

$$v'_{cl}(x) = u'_{cl}(-x), \quad v''_{cl}(x) = -u''_{cl}(-x)$$

$$\Longrightarrow \quad -v''_{cl}(x) + v(x) = u''_{cl}(-x) - u(-x) = -f(-x) = g(x), \text{entonces,}$$

$$-v''_{cl}(x) + v(x) = g(x); \quad -\infty < x < \infty, \text{luego por } \ (v),$$

$$-v''_{gen}(x) + v(x) = g(x) - 2a\delta'(x); \quad -\infty < x < \infty$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} (\omega^2+1)\widehat{v}(\omega) = \widehat{g}(\omega) - \frac{ia}{\pi}\omega \quad \Longrightarrow \quad \widehat{v}(\omega) = \widehat{g}(\omega)\frac{1}{\omega^2+1} - \frac{a}{\pi}i\omega\frac{1}{\omega^2+1}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} v(x) = \frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - a(e^{-|x|})'_{gen} =$$

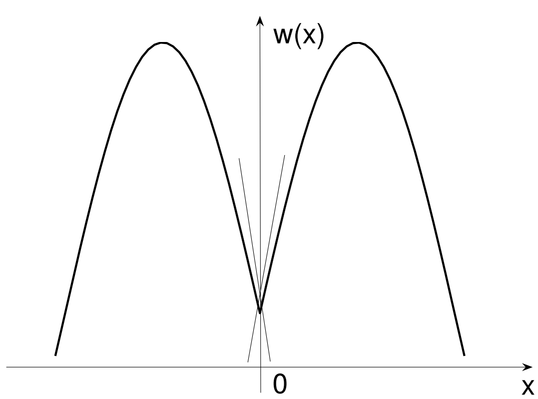
$$\frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - a\begin{cases} e^x, & x < 0 \\ -e^x, & x > 0 \end{cases}$$

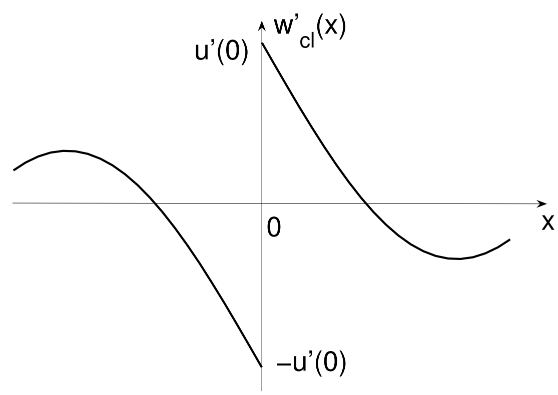
luego para $x > 0$ (es decir) $v(x) = u(x)$,

$$u(x) = \frac{1}{2}g(x) * e^{-|x|} - ae^{-x}; \quad x \geq 0 \tag{6}$$

solución atemperada del problema.

Veamos ahora porque una extensión par no sirve. Sea $w(x)$ extensión par de $u(x)$





Tenemos ahora $w'_{gen}(x) = w'_{cl}(x), \quad w''_{cl}(x) + 2u'(0)\delta(x)$.

Pero no conocemos el valor de $u'(0)$: no es un dato del problema. Sin embargo, cuando reemplazamos (2) por $u'(0) = b$, entonces, una extensión por si sirve, y se obtiene (¡verifique!) via la TF la solución

$$u(x) = \frac{1}{2}k(x) * e^{-|x|} - be^{-x}; \quad x \geq 0$$

donde $k(x)$ es la solución par de $f(x)$.

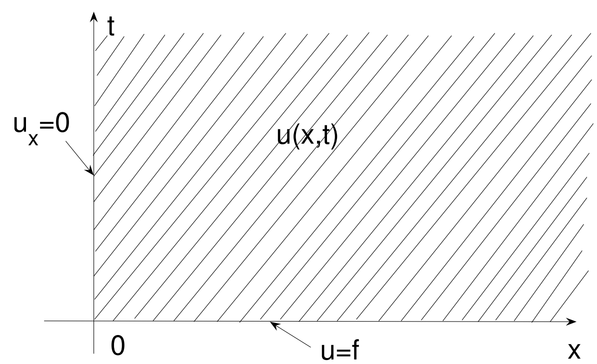
Ejemplo 2. *Sea el problema de la conducción de calor en una barra semi infinita dado por*

$$u_t = u_{xx}, \ \ x, t \leq 0 \tag{7}$$

$$u(x, 0) = f(x), \ \ x \leq 0 \tag{8}$$

$$u_x(0, t) = 0, \ \ t \leq 0 \tag{9}$$

donde $f(x) = (1 + x)e^{-x}; \ \ x \leq 0.$



Para aplicar la TF con respecto a la variable x necesitamos extender el problema a todo el semiplano superior $-\infty < x < \infty, \quad t \leq 0$. El ejemplo anterior nos indica que para la condición (9) es apropiada una extensión par de $u(x, t)$ en la variable x, poniendo para todo $t \leq 0$ fijo

$$v(x,t) \begin{cases} u(x,t), x > 0 \\ u(-x,t), x < 0 \end{cases}$$

y también extender $f(x)$ de manera para. Sea $g(x)$ la extensión par de $f(x)$. Tenemos

$$(v_x)_{gen}(x,t) = (v_x)_{cl}(x,t), \quad (v_{xx})_{gen}(x,t) = (v_{xx})_{cl}(x,t) + 2u_x(0,t)\delta(x)$$

$$\stackrel{(9)}{\Longrightarrow} (v_{xx})_{gen}(x,t)(v_{xx})_{gen}(x,t) = (v_{xx})_{cl}(x,t), \quad \text{luego}$$

$$(v_{xx})_{gen} - v_t = (v_{xx})_{cl} - v_t \Rightarrow (v_{xx})_{gen}(x,t) = v_t(x,t)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{F}} -w^2\widehat{v}(w,t) = \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} \ \text{ ya que (¡verifique!) } \ v_t \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\partial \widehat{v}}{\partial t}$$

Además $v(x,0) \overset{9}{=} g(x)$, $-\infty < x < \infty \Rightarrow \widehat{v}(w,0) = \widehat{g}(w)$, y tenemos para cada w fijo el PVI

$$\frac{\partial \widehat{v}}{\partial t} + w^2\widehat{v}(w,t), \ \ t \leq 0 \tag{10}$$

$$\widehat{v}(w,0) = g(w) \tag{11}$$

La ED ((10)) tiene solución general $\widehat{v}(w,t) = A(w)e^{-w^2 t}$, luego con (11) $A(w) = \widehat{g}(w)$

$$\Longrightarrow \ \ \widehat{v}(w,t) = \widehat{f}(w)e^{-w^2 t}; \quad -\infty < x < \infty, \ t > \leq 0. \tag{12}$$

A partir de (12) tenemos dos opciones: aplicar la <u>fórmula de inversión</u> o la <u>fórmula de la convolución</u> (2., clase 18).

Con la fórmula de inversión y

$$g(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \widehat{g}(w) = \frac{2}{\pi(1+w^2)^2} \tag{13}$$

tenemos

$$(12) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} v(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\frac{e^{-w^2 t}}{(1+w^2)^2}dw =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx)\frac{e^{-w^2 t}}{(1+w^2)^2}dw + \frac{2i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} sen(wx)\frac{e^{-w^2 t}}{(1+w^2)^2}dw, \ \ \text{donde la segunda integral}$$

es 0 porque $sen(wx)\frac{e^{-w^2 t}}{(1+w^2)^2}$ es función impar de w. Finalmente, porque el integrando en la primera integral es par,

$$v(x,t) = \frac{4}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(wx)\frac{e^{-w^2 t}}{(1+w^2)^2}dw; \quad x \geq 0, \ t \geq 0 \tag{14}$$

es la solución del problema. Pero ¿cómo obtener (13)? Esto es un problema <u>adicional</u> que habría que resolver (ver guía, páginas 6.65,6.66).

Aplicando la fórmula de la convolución <u>evita</u> el problema de hallar $\widehat{g}(w)$. Tenemos

$$(12) \ \underset{2., \text{Clase } 18}{\xrightarrow{\mathcal{F}}} \ v(x,t) = \frac{1}{2\pi}g(x) * k(x), \ \ \text{donde} \ \ k(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} e^{-tw^2}.$$

Pero

$$e^{-tw^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

según un ejemplo de la Clase 17. Entonces

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\dfrac{x^2}{4t}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi, \end{aligned}$$

y utilizando $g(\xi) = f(\xi)$, para $\xi > 0$ y $g(\xi) = f(-\xi)$ para $\xi < 0$ (ya que $g(\xi)$ es extensión para de $f(\xi)$), tenemos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\pi t}v(x,t) &= \int_{-\infty}^{0} g(\xi)e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi + \int_{0}^{\infty} g(\xi)e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{0} f(-\xi)exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right]d\xi + \int_{0}^{\infty} f(\xi)exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right]d\xi \\ &= (s=-\xi \text{ en primera integral}) \\ &= -\int_{\infty}^{0} f(s)e^{-\dfrac{(x+s)^2}{4t}}ds + \int_{0}^{\infty} f(\xi)e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}d\xi \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad 2\sqrt{\pi t}v(x,t) = \int_{0}^{\infty} f(\xi)\left[e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}} + e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}\right]d\xi$$

y finalmente

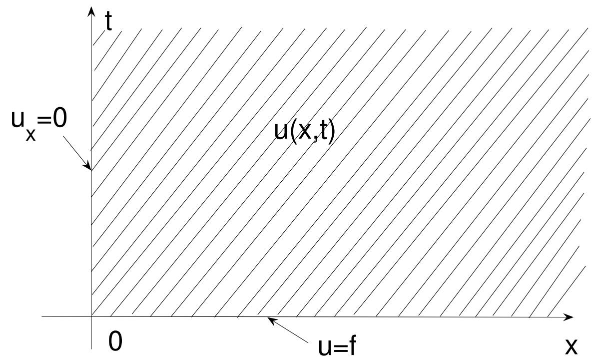
$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\int_{0}^{\infty} f(\xi)\left[e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}} + e^{-\dfrac{(x-\xi)^2}{4t}}\right]d\xi;\quad x,t\geq 0.$$

Ejemplo 3. *Consideremos la propagación de ondas transversales en una cuerda infinita, dados la posición inicial $f(x)$ y la velocidad inicial $g(x)$. El problema matemático es*

$$u_{tt} = c^2u_{xx};\quad -\infty < x < \infty,\quad t\geq 0 \tag{15}$$

$$u(x,0) = f(x);\quad -\infty < x < \infty \tag{16}$$

$$u_t(x,0) = g(x);\quad -\infty < x < \infty \tag{17}$$



Aplicando TF en la variable x obtenemos de (15), (16) el PVI

$$\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial t^2} + \omega^2 c^2 \hat{u}(\omega, t) = 0; \quad t \geq 0 \tag{18}$$

$$\hat{u}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega), \quad \hat{u}_t(\omega, 0) = \hat{g}(\omega) \tag{19}$$

para cada ω fijo. La solución general de (18) (en forma compleja)

$$\hat{u}(\omega, t) = A(\omega)e^{i\omega ct} + B(\omega)e^{-i\omega ct},$$

luego

$$\hat{u}_t(\omega, t) = i\omega c A(\omega)e^{i\omega ct} - i\omega c B(\omega)e^{-i\omega ct}$$

luego con (19) tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} \hat{f}(\omega) & = & A(\omega) + B(\omega) \\ \hat{g}(\omega) & = & i\omega c A(\omega) - i\omega c B(\omega) \end{array}\right\} \implies \quad \text{(resolviendo por } A(\omega),\ B(\omega))$$

$$\implies \quad A(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c}, \quad B(\omega) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega) - \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c},$$

luego

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega)\left(e^{i\omega ct + e^{-i\omega ct}}\right) + \frac{\hat{g}(\omega)}{2i\omega c}\left(e^{i\omega ct} - e^{-i\omega ct}\right)$$

$$\implies \quad \hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2}\hat{f}(\omega)\left(e^{i\omega ct + e^{-i\omega ct}}\right) + \hat{g}(\omega)\frac{\operatorname{sen}(\omega ct)}{\omega c}. \tag{20}$$

Con $e^{i\omega ct} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\delta(x + ct)$, $e^{-i\omega ct} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} 2\pi\delta(x - ct)$ (ver la Clase 18) y $\frac{\operatorname{sen}(ct\omega)}{\pi\omega} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} X_{ct}(x)$ (ver la Clase 17), tenemos con 2., Clase 18,

$$(20) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u(x, t) = \frac{1}{2}f(x) * [\delta(x + ct) + \delta(x - ct)] + \frac{1}{2c}X_{ct}(x) * g(x)$$

$$\implies \quad u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}X_{ct}(x)*g(x). \tag{21}$$

Pero

$$X_{ct}(x)*g(x)=\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi \quad \text{(¡Verifique!)},$$

de modo que (21) da

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x+ct)+f(x-ct)]+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)d\xi; \quad -\infty<x<\infty, \quad t\geq 0,$$

la <u>solución de D' Alembert</u>.